Algebra di Lie

{trasformazioni} soggette a una regola di commutazione astratta

Le trasformazioni vivono in uno spazio vettoriale L

e il commutatore è un operazione $L \times L \mapsto L$

Trattandosi di uno spazio vettoriale, possiamo definire un prodotto scalare?

Si può definire e per farlo serve alcuni strumenti ausiliari

LA FORMA DI KILLING

Dati $a, b \in L$

$$FdK_{ab} = (a, b) := Tr \ Ad\,a \ Ad\,b = Tr(\hat{a}\hat{b})$$

$a, b \in L$ ma anche $Ad\,a \in L$ e pure $Ad\,b \in L$

La traccia quindi si può calcolare prendendo elementi di base x_i in L e calcolando $[a, [b, x_i]]$ poi andando a vedere il coefficiente di x_i in $\sum_j c_j x_j = [a,[b,x]]$

Esplicitamente (t_z, t_z) coinvolge $\mathrm{Ad}\, t_z\ \mathrm{Ad}\, t_z$

per cui $\left[t_z, [t_z, t_z]\right] = 0$

altri con risultato 0

$$\left[t_z, \overbrace{[t_z, t_+]}^{t_+}\right] = t_+ \longrightarrow 1$$

$$\left[t_z, \overbrace{[t_z, t_-]}^{-t_-}\right] = t_- \longrightarrow 1$$

$\vdots$

sommo tutto e trovo

$$(t_z, t_z) = 3$$

tranne $(v_+, v_-) = 6$ $(u_+, u_-) = 6$ $(t_+, t_-) = 6$ $(y, y) = 4$

e $(t_z, t_z) = 3$ sono tutte zero

NON È UN PRODOTTO SCALARE PERCHÈ NON È DEFINITO POSITIVO

P.ES. $(iy, iy) = -4$

PERÒ LO POSSIAMO USARE PER DEFINIRE UNA NUOVA Q.TÀ NELLO SPAZIO DELLE RADICI (IL Σ della dec. $L = H \oplus \Sigma$)

LA FORMA DI KILLING PERMETTE DI INDIVIDUARE UN ELEMENTO NELLO SPAZIO H^* (LO SPAZIO DUALE ALLA SOTTOALGEBRA di CARTAN) ASSOCIATO A CIASCUN $h \in H$. Questo è utile se poi riesco a definire un prodotto scalare in H^* $\langle \, , \, \rangle$

così poi dico $\langle \text{radice}(\alpha), \text{radice}(\beta) \rangle$ = prodotto scalare tra α, β

$$\rho \in H^* \qquad \exists! \; h_\rho \in H \quad t.c.$$

$$(*) \qquad \rho(k) = (h_\rho, k) \quad \forall k \in H$$

Nel caso di $SU(3)$ abbiamo trovato 3 radici

$$\alpha_1(at_z + by) = a$$

$$\alpha_2(at_z + by) = -\frac{1}{2}a + b$$

$$\alpha_3(at_z + by) = \frac{1}{2}a + b$$

e posso identificare gli elementi h_α identificati dalla Folk

$$h_{\alpha_i} = c_i t_z + d_i y \quad \text{con} \quad c_i \text{ e } d_i \text{ da determinarsi}$$

dalla definizione $\circledast$ $\quad \rho(k) = (h_\alpha, k) \quad \forall k \in H$

$$(h_{\alpha_i}, t_z) = 3c_i$$

$$(h_{\alpha_i}, y) = 4d_i$$

Quindi per α_i specializzando questa relazione per $\alpha_{i=1,2,3}$

$$\alpha_1 = a \longrightarrow c_1 = \frac{1}{3} \;\&\; d_1 = 0$$

$$\alpha_{2,3} = \mp\frac{1}{2}a + b \longrightarrow c_2 = \mp\frac{1}{6} \quad d_2 = \frac{1}{4}$$

$$\boxed{\begin{aligned} h_{\alpha_1} &= \frac{1}{3} t_z \\ h_{\alpha_{2,3}} &= \mp \frac{1}{6} t_z + \frac{1}{4} Y \end{aligned}}$$

$$\alpha_2 + \alpha_1 = \alpha_3 \Rightarrow h_2 + h_1 = h_3$$

Lo spazio delle radici si può generare con due vettori radice di base e similmente 2 sono gli elementi di H identificati dalla FdK coi quali posso fare una base.

combinazioni reali

Date radici in H^*_0 α, β generiche combinazioni lineari di h_2 e h_1 identifico il prodotto scalare in H^*

$$\langle \alpha, \beta \rangle = (h_\alpha, h_\beta)$$

con la Forma di Killing degli elementi in H identificati tramite la Forma di Killing.

1.es.

$\alpha = \alpha_1$

$$\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle = (h_{\alpha_1}, h_{\alpha_1}) = \frac{1}{9}(t_z, t_z) = \frac{1}{3}$$

$$\langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle = \left(\frac{1}{6} t_z + \frac{1}{4} Y, \frac{1}{6} t_z + \frac{1}{4} Y \right) = \frac{1}{3}$$

$$\langle \alpha_1, \alpha_3 \rangle = \frac{1}{6}$$

$$\langle \alpha_2, \alpha_3 \rangle = \frac{1}{6}$$

$$\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = -\frac{1}{6}$$

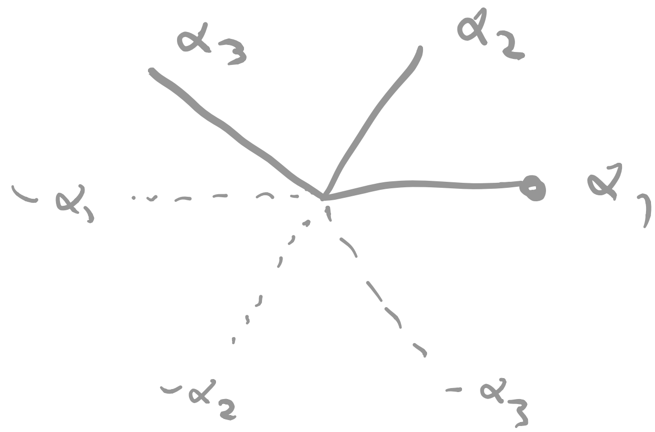
$$\hat{\alpha}_i = \frac{\alpha_i}{\sqrt{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle}} \quad \text{versori}$$

$$\langle \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2 \rangle = \frac{1}{2}$$

$$\langle \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_3 \rangle = -\frac{1}{2}$$

$\langle \quad \rangle$ da $H_0^* \times H_0^*$ a $\mathbb{R}$ ha notevoli proprietà di simmetria. Infatti possiamo rappresentare gli

$\alpha_{1,2,3}$ come vettori spaziati $\vartheta = \arccos\left(\pm\frac{1}{2}\right)$



QUALCHE DEFINIZIONE UTILE:

- SUB-ALGEBRA: un sottoinsieme delle operazioni t_i che è chiuso (cioè mappato in se stesso) sotto il prodotto di Lie

$$x, y \in S \qquad [x, y] \in S$$

p. es. $SU(2)$ di $t_{x,y,z}$ in $SU(3)$

SUB-ALGEBRA ABELIANA se tutti gli elementi in S commutano tra di loro

CARTAN SUB-ALGEBRA $\{t_z, y\}$

- IDEALE: una sub-algebra J i cui elementi hanno Ad che mappa l'intera L in J

$x_1, x_2 \in J$

$[x_1, x_2] \in J$

$$x \in J \quad y \in L \Rightarrow [x, y] \in J$$

P.es $U(3)$ generata dalle $\lambda_{i=1..8}$ di $SU(3)$ più $\mathbb{1}_{3\times3}$

$SU(3) \subset U(3)$ è una sub-algebra e anche un ideale

$\mathbb{1} \subset U(3)$ è una sub-algebra e anche un ideale

$$U(3) = SU(3) \otimes U(1)$$

- ALGEBRA SEMPLICE: una algebra che ha solo sub-algebre triviali

$SU(3)$ è semplice

- ALGEBRA SEMI-SEMPLICE: non ha subalgebre ideali abeliane

se ha una sub-algebra ideale abeliana, ha una subalgebra, quindi non è semplice e neppure semi-semplice
se non ha sub-algebre ideali abeliane, può averne di non-abeliane, può essere semi-semplice e non essere semplice

In generale un algebra semi-semplice è la somma di ideali semplici. Ciascuno può essere associato a diversi numeri quantici. P.es. $SU(3) \times SU(2)$ è semi-semplice fatto di un ideale semplice $SU(3)$ e un $SU(2)$